EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta* ….033**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $\frac{4-i}{1+4i}$.

(4p) **b)** Să se calculeze distanța de la punctul $D(4,3,2)$ la planul $x+2y+3z-5=0$.

(4p) **c)** Să se determine ecuația tangentei la elipsa $x^2+4y^2=5$ în punctul $P(1,\ -1)$.

(4p) **d)** Să se arate că $\sin 4 < \sin 3$.

(2p) **e)** Să se calculeze volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele $A(1,1,2)$, $B(1,2,1)$, $C(2,1,1)$ și $D(4,\ 3,\ 2)$.

(2p) **f)** Să se determine $a,b,c\in\mathbf{R}$, astfel încât punctele $A(1,1,2)$, $B(1,2,1)$ și $C(2,1,1)$ să aparțină planului $x+ay+bz+c=0$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze suma elementelor grupului $(\mathbf{Z}_7,+)$.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un element $\hat{x}\in\mathbf{Z}_5$ să verifice relația $\hat{x}^3=\hat{1}$.

(3p) **c)** Să se arate că $\log_2 9 > \log_3 4$.

(3p) **d)** Să se determine numărul termenilor iraționali ai dezvoltării binomului $\left(1+\sqrt{2}\right)^{10}$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma rădăcinilor polinomului $f=X^3-2X^2+3$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x-\cos x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)\,dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este crescătoare pe intervalul $[0,\infty)$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Se consideră mulțimea M formată din toate matricele cu 3 linii şi 3 coloane şi care au toate elementele din mulțimea $\{-1, +1\}$.

(4p) **a)** Să se găsească o matrice $C \in M$, pentru care $\det(C) = 4$.

(4p) **b)** Să se arate că, dacă $A \in M$, atunci determinantul matricei A se divide cu 4.

(4p) **c)** Să se arate că, dacă $A \in M$, atunci $-6 \le \det(A) \le 6$.

(2p) **d)** Să se arate că, dacă $A \in M$, atunci $\det(A) \in \{-4, 0, 4\}$.

(2p) **e)** Să se arate că, dacă $B \in M$ este o matrice inversabilă, atunci $B^{-1} \notin M$.

(2p) **f)** Să se arate că, $\forall r \in \{1, 2, 3\}$ există $A \in M$, astfel încât $rang(A) = r$.

(2p) **g)** Să se arate că, dacă $A \in M$, atunci matricea A^{2007} are toate elementele nenule .

SUBIECTUL IV (20p)

Pentru orice număr natural nenul n notăm cu p_n al $n-lea$ număr prim şi cu $(a_n)_{n\in \mathbf{N}^*}$ şirul

$$a_n = \frac{p_1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2}{p_2-1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_n}{p_n-1} .$$

(4p) **a)** Să se arate că $1 + a + \ldots + a^n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$, $\forall a \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **b)** Dacă $a \in (-1,1)$, să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + a + \ldots + a^n) = \dfrac{1}{1-a}$.

(4p) **c)** Să se arate că dacă $p > 1$, atunci $\dfrac{p}{p-1} > 1 + \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^2} + \ldots + \dfrac{1}{p^n}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **d)** Să se arate că $\ln(x+1) - \ln x < \dfrac{1}{x}$, $\forall x > 0$.

(2p) **e)** Să se arate că $1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n} > \ln(n+1)$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}\right)$.

(2p) **g)** Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.